

## Übung zu Folgen, Reihen und Grenzwerte

- Gegeben ist die Folge  $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \frac{32}{243}, \dots$ .
  - Um welchen Typ von Folge handelt es sich?
  - Geben Sie das 6. Glied an.
  - Berechnen Sie die Summe der ersten 5 Glieder.
- Eine Unternehmung produziert 200 Einheiten eines Gutes im ersten Jahr und steigert die Produktion in jedem der folgenden Jahre um 50 Einheiten.
  - Wie groß ist die Gesamtsumme der Produktion nach 7 Jahren?
  - Wieviel Einheiten werden im 10. Jahr produziert?
- Gegeben seien drei Zahlenfolgen  $\{x_i\}$ ,  $\{y_i\}$  und  $\{z_i\}$ , die nach folgenden Gesetzen gebildet werden:
$$x_i = \frac{1}{i} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots$$
$$y_i = (-1)^{i-1} \cdot 2i + 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots$$
$$z_i = z_{i-1} \cdot z_{i-2} \quad \text{für } i = 3, 4, \dots ; z_1 = 1, z_2 = 2.$$

Wie lauten die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge  $\{v_i\}$ , wenn man ihre Glieder nach der Vorschrift  $v_i = x_i + y_i + z_i$  bildet?

4. Bestimmen Sie

a)  $\sum_{i=1}^{20} 3i$

b)  $\sum_{i=1}^{10} (4i + 3)$

5. Bestimmen Sie

a)  $\sum_{i=1}^5 4 \cdot 2^i$

b)  $\sum_{i=1}^6 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$

6. Bestimmen Sie

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n}$

b)  $\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}$

7. Bestimmen Sie

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 4n + 8}{5n^2 - 6n}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{3}{n}\right)$

8. Gegeben ist die Folge mit dem allgemeinen Glied

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n^3}.$$

Welche der folgenden Aussagen über die Folge sind richtig?

- a) Die Folge hat zwei Grenzwerte.
- b) Die Folge ist beschränkt und streng monoton fallend.
- c) Die Folge konvergiert nicht.

9. Bestimmen Sie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n^6 + n^4 + 1}{\frac{1}{2}n^6 + n^5}.$

10. Berechnen Sie folgende Reihen, sofern sie existieren:

a)  $\frac{1}{3} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k$

b)  $\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} n$

d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

e)  $\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + \left(\frac{1}{11}\right)^i \right]$

f)  $\sum_{i=2}^{\infty} \left[ 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-2} + 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{i+1} \right]$

g)  $\sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{1}{3}\right)^{i+1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} \right]$

h)  $\sum_{i=1}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}$

i)  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{6}{4^{i-1}}$

j)  $\sum_{i=1}^{\infty} 12 \left(\frac{1}{4}\right)^i$

k)  $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{i-2}$

l)  $\sum_{i=3}^{\infty} 20 \left(\frac{1}{5}\right)^{i-1}$

m)  $\sum_{i=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i$

n)  $\sum_{i=-2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{i-2}$

11. Stellen Sie fest, ob die nachstehende Reihe konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n}$$